Chapitre 2 : Tests d'hypothèse ou tests statistiques

A/ Généralités :

I/ Utilité des tests statistiques en santé.

1/ Évaluation de l'efficacité d'un traitement

ex: Ω : {souris cancéreuses}
A : "avoir le cancer"
$p_0 = P(A) = 20\%$ dans la pop.
éch.
Traitement → $p = P(A)$

i/ $p_0 = 20\%$; $p = 20\%$; $p = p_0$.
Il n'y a pas de différence entre p et p_0

ii/ $p_0 = 20\%$; $p = 21\%$
Il n'y a pas d'évidence de différence entre p et p_0.
La différence peut être due au hasard (fluctuation de l'éch.).

iii/ $p_0 = 20\%$; $p = 1\%$
Il y a une évidence de différence entre les 2 proportions.

iv/ $p_0 = 20\%$; $p = 15\%$? → Test
On déclarera le traitement actif si, le taux de cancéreux après traitement p s'écarte "nettement" du taux de cancéreux avant le traitement p_0. C'est le sens que l'on donne à ce "nettement" qui est le fondement du principe des tests statistiques.

On suppose 2 hypothèses :
H_0 : $p = p_0$ contre H_1 : $p \neq p_0$ ($p > p_0$ ou $p < p_0$)
H_0 : hypothèse nulle.
H_1 : hypothèse alternative.

2/ Évaluation des facteurs de risque :

Utilisateurs de tél mobile 66/469 ≃ 14 %	Tumeur cérébrale n=469
Utilisateurs de tél mob 76/422 ≃ 18%	Pas de tumeur n=422

Comment interpréter la proportion un peu plus élevée d'utilisateurs de portables chez les non-malades ?
Réelle association entre l'utilisation du portable et tumeur cérébrale ?

3/ Finalité des tests statistiques :

- Lire et interpréter une étude.
- Tester l'efficacité et la sécurité d'un traitement.

II/ Principe général des tests :

1/ Mise en oeuvre des tests :

a/ Choisir clairement l'hypothèse nulle H_0. En général (toujours), H_0 engage une réalité.
H_1 est le complémentaire de H_0

b/ Les tests stat. sont basés sur des lois de distribution théoriques (Normale, Student, Khi-deux).
(étape calculatoire).



On construit une v.a. à partir d'un éch. choisi. Donc, cette v.a. est fonction des observations.

ex : $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Ces lois nécessitent les conditions d'application.

$T = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n-1}} \sim St_{(n-1)}$

Cette variable aléatoire est appelée Statistique de test.

c/ Conclusion : définir une règle de décision qui est soit non rejet de H_0 ou rejet de H_0, avec un risque α.

2/ Différents types d'erreurs :

a/ Erreur de 1ère espèce ou de type I :

$\alpha = P$(rejeter H_0 alors que dans la réalité, H_0 est vraie).

$\alpha = P$(conclure H_1 alors que H_0 est vraie).

α est fixé au préalable ($\alpha = 5\%$).

b/ Erreur de 2nde espèce ou de type II :

$\beta = P$(rejeter H_1 alors que H_1 est vraie)

$\beta = P$(conclure H_0 alors que H_1 est vraie)

N.B. :

H_0 et H_1 ne sont pas symétriques.
α et β n'ont pas le même poids.
Il est plus grave de commettre l'erreur α que l'erreur β.

ex : Dans un essai thérapeutique, où le but est d'établir l'efficacité d'un traitement, le risque d'erreur le plus grave est de déclarer :

$\alpha = P$(le trait. est efficace [H_1] alors qu'il ne l'est pas [H_0]).

$\beta = P$(le trait. est non efficace alors qu'il l'est).

3/ Puissance :

Elle est définie par :

$$\pi = 1 - \beta.$$

$\pi = 1 - P$(rejeter H_1 alors que H_1 est vraie)

$\pi = P$(ne pas rejeter H_1 alors que H_1 est vraie)

4/ Degré de signification / p valeur / p-value :

$\alpha = 5\%$: conclusion → rejeter H_0

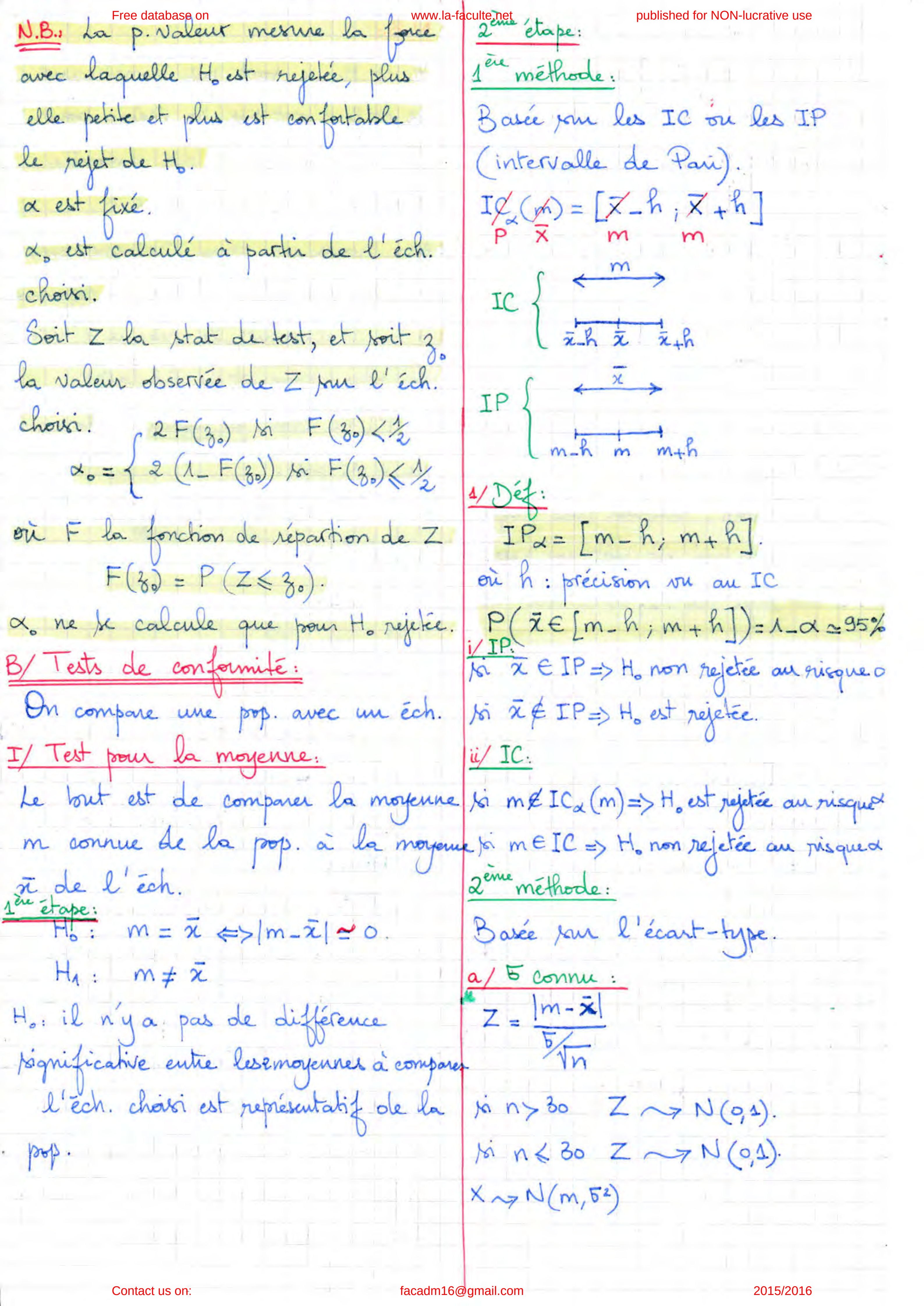
$\alpha = 4\%$: conclusion → rejeter H_0

$\alpha = 3\%$: conclusion → rejeter H_0

⋮ ⋮

$\alpha = \alpha_0$: conclusion → ne pas rejeter H_0

α_0 est la plus petite erreur (erreur minimale) avec laquelle H_0 est rejetée ou l'erreur maximale avec laquelle H_0 est non rejetée.



N.B.: La p.valeur mesure la force avec laquelle H_0 est rejetée, plus elle petite et plus est confortable le rejet de H_0.

α est fixé.

α_0 est calculé à partir de l'éch. choisi.

Soit Z la stat de test, et soit z_0 la valeur observée de Z sur l'éch. choisi.

$$\alpha_0 = \begin{cases} 2F(z_0) & \text{si } F(z_0) < \frac{1}{2} \\ 2(1 - F(z_0)) & \text{si } F(z_0) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

où F la fonction de répartion de Z

$$F(z_0) = P(Z \leqslant z_0).$$

α_0 ne se calcule que pour H_0 rejetée.

B/ Tests de conformité:

On compare une pop. avec un éch.

I/ Test pour la moyenne:

Le but est de comparer la moyenne m connue de la pop. à la moyenne $\bar{x}$ de l'éch.

1ère étape:

H_0 : $m = \bar{x} \Leftrightarrow |m - \bar{x}| \simeq 0$.

H_1 : $m \neq \bar{x}$

H_0: il n'y a pas de différence significative entre les moyennes à comparer

l'éch. choisi est représentatif de la pop.

2ème étape:

1ère méthode:

Basée sur les IC ou les IP (intervalle de Pari).

$IC_\alpha(m) = [\bar{X} - h ; \bar{X} + h]$ (corrigé : $IP_\alpha(\bar{x}) = [m - h ; m + h]$)

IC : m ; $\bar{x}-h$, $\bar{x}$, $\bar{x}+h$

IP : $\bar{x}$; $m-h$, m, $m+h$

1/ Déf:

$$IP_\alpha = [m - h ; m + h].$$

où h : précision ou au IC

$$P(\bar{x} \in [m - h ; m + h]) = 1 - \alpha \simeq 95\%$$

i/ IP:

si $\bar{x} \in IP \Rightarrow H_0$ non rejetée au risque α

si $\bar{x} \notin IP \Rightarrow H_0$ est rejetée.

ii/ IC:

si $m \notin IC_\alpha(m) \Rightarrow H_0$ est rejetée au risque α

si $m \in IC \Rightarrow H_0$ non rejetée au risque α

2ème méthode:

Basée sur l'écart-type.

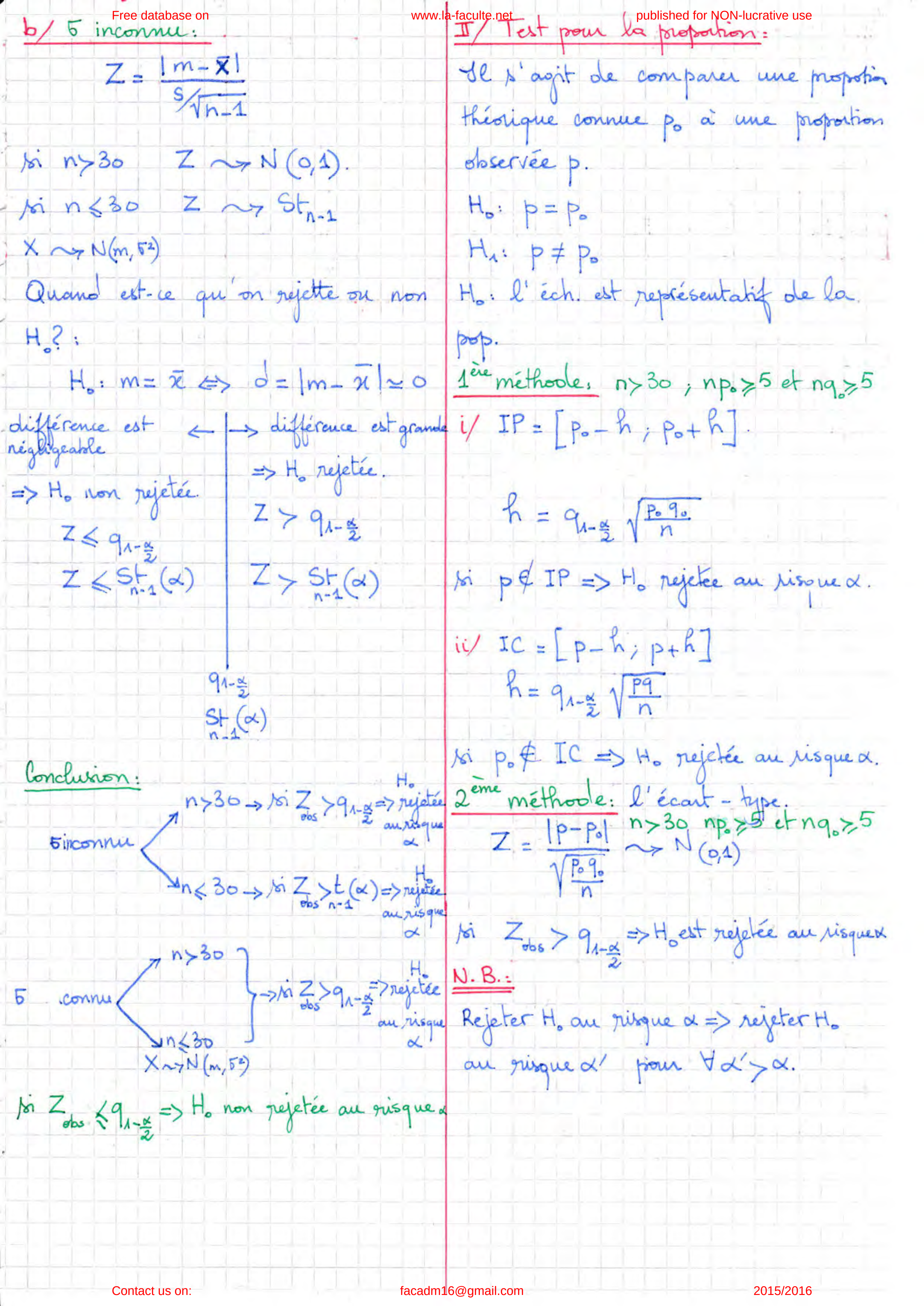
a/ σ connu :

$$Z = \frac{|m - \bar{x}|}{\sigma / \sqrt{n}}$$

si $n > 30$ $Z \leadsto N(0,1)$.

si $n \leqslant 30$ $Z \leadsto N(0,1)$.

$X \leadsto N(m, \sigma^2)$



b/ σ inconnu :

$$Z = \frac{|m - \bar{x}|}{s/\sqrt{n-1}}$$

si $n > 30$ $Z \rightsquigarrow N(0,1)$.

si $n \leq 30$ $Z \rightsquigarrow St_{n-1}$

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

Quand est-ce qu'on rejette ou non H_0 ? :

$$H_0 : m = \bar{x} \Leftrightarrow d = |m - \bar{x}| \simeq 0$$

différence est négligeable ←	→ différence est grande
⇒ H_0 non rejetée	⇒ H_0 rejetée
$Z \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$Z > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$Z \leq St_{n-1}(\alpha)$	$Z > St_{n-1}(\alpha)$

$q_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$St_{n-1}(\alpha)$

Conclusion :

σ inconnu :
- $n > 30$ → si $Z_{obs} > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ⇒ H_0 rejetée au risque α
- $n \leq 30$ → si $Z_{obs} > t_{n-1}(\alpha)$ ⇒ H_0 rejetée au risque α

σ connu :
- $n > 30$
- $n \leq 30$, $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$

} → si $Z_{obs} > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ⇒ H_0 rejetée au risque α

si $Z_{obs} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ⇒ H_0 non rejetée au risque α

II/ Test pour la proportion :

Il s'agit de comparer une proportion théorique connue p_0 à une proportion observée p.

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \neq p_0$

H_0 : l'éch. est représentatif de la pop.

1ère méthode : $n > 30$; $np_0 \geq 5$ et $nq_0 \geq 5$

i/ $IP = [p_0 - h \,;\, p_0 + h]$.

$$h = q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$$

si $p \notin IP$ ⇒ H_0 rejetée au risque α.

ii/ $IC = [p - h \,;\, p + h]$

$$h = q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

si $p_0 \notin IC$ ⇒ H_0 rejetée au risque α.

2ème méthode : l'écart-type.

$$Z = \frac{|p - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$n > 30$, $np_0 \geq 5$ et $nq_0 \geq 5$

si $Z_{obs} > q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ⇒ H_0 est rejetée au risque α

N. B. :

Rejeter H_0 au risque α ⇒ rejeter H_0 au risque α' pour $\forall \alpha' > \alpha$.

III/ Test du χ^2 :

Il s'agit de comparer une distribution observée à une distribution théorique : c'est la généralisation du cas précédent

	x_i	x_1	x_2	...	x_k	Σ
thés.	p_{0i}	p_{01}	p_{02}	...	p_{0k}	1
obs.	p_i	p_1	p_2	...	p_k	1

$p_i = P(X = x_i)$

k = nbre de classes (modalités)

H_0 : la distribution théorique (pop) est conforme à la distribution observée (éch).

H_0 : $p_{0i} = p_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$.

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i} \quad \forall c_i \geq 5.$$

avec : θ_i = effectif observé de la classe i

c_i = effectif théorique (calculé) de la classe i.

$c_i = n p_{0i}$: n = taille de l'éch. ; p_{0i} = la proportion théorique de la classe i.

Classes	θ_i	p_{0i}	$c_i = np_{0i}$	$\frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Σ	n	1	n	χ^2_{cal}

$\chi^2_{cal} \sim \chi^2_\nu$ où $\nu = k-1$

si $\chi^2_{cal} > \chi^2_{k-1}(\alpha) \Rightarrow H_0$ rejetée (α).

où $\chi^2_{k-1}(\alpha)$ lu sur la table du χ^2 correspondant à α et $\nu = ddl = k-1$

Classes	θ_i	p_{0i}	$c_i = np_{0i}$	$\frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i}$
O	35	0,45	45	
A	35	0,35	35	
B	20 } 30	0,16	16 } 20	$\frac{(30-20)^2}{20}$
AB	10	0,04	4	
Σ	n 100	1	$n=100$	$\chi^2_{cal} = 7,22$

N.B. : $k > 2$ et $\exists c_i < 5$

Dans ce cas, on fait un regroupement de classes.

Les classes à regrouper doivent être successives.

On regroupera autant de classes que nécessaire pour que tous les $c_i \geq 5$.

Soit k' le nbre de classes après regroupement

$\nu = ddl = k' - 1$

$k = 4 \rightarrow k' = 3 \Rightarrow \nu = k' - 1 = 2$

si $\chi^2_{cal} > \chi^2_2(0{,}05) = 5{,}95$.

$\Rightarrow H_0$ rejetée au risque 5%

$k = 2$ et $\exists c_i < 5$.

Pas de rejet

On procède à la «correction de Yates» :

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(|\theta_i - c_i| - \frac{1}{2}\right)^2}{c_i}$$

si $\chi^2_{cal} > \chi^2_1(\alpha) \Rightarrow H_0$ rejetée (α)

Cas particulier de 2 classes :

H_0 : $p_{o_1} = p_1$ et $p_{o_2} = p_2$

$1 - p_{o_1} = 1 - p_1$ $\quad$ $1 - p_{o_2} = 1 - p_2$

$p_{o_2} = p_2$

x_i	x_1	x_2
p_{o_i}	p_{o_1}	p_{o_2}
p_i	p_1	p_2

Dans ce cas, le test de conformité du χ^2 est équivalent au test de conformité de l'écart réduit pour la proportion.

Exo :

On lance une pièce de monnaie fois, on obtient 45 pile ?
- La pièce est-elle équilibrée ?

H_0 : la pièce est équilibrée.

45 pile $\rightarrow p = \frac{45}{100} = 0,45$ $\quad p_0 = \frac{1}{2}$

H_0 : $p = p_0$

1ère méthode : l'écart type : $\varepsilon = 1$

$$\varepsilon = \frac{|p - p_0|}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1) \quad np_0 = 50 > 5 \text{ et } nq_0 = 50 > 5$$

$$\varepsilon = \frac{|0,45 - 0,5|}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}} = 1 \quad \alpha = 5\%$$

$q_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$1 < 1,96 \Rightarrow H_0$ non rejetée à 5%

2e méthode : test du χ^2 :

H_0 :

$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{2} \frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i}$$

Classes	θ_i	p_{o_i}	c_i	$\frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i}$
Pile	45	$\frac{1}{2}$	50	$\frac{1}{2}$
Face	55	$\frac{1}{2}$	50	$\frac{1}{2}$
Σ	100	1	100	$\chi^2_{cal} = 1$

$k = 2 \rightarrow \gamma = 1$

$\chi^2_1(0,05) = 3,84$

$\chi^2_{cal} = 1 < 3,84 \Rightarrow H_0$ non rejetée au risque 5%

N.B. : $\varepsilon^2 = \chi^2_{cal}$

IV/ Test d'ajustement du χ^2 :

$p_{o_i} = P(X = i)$ $\quad X \rightsquigarrow$ loi usuelle.

ex : $X \rightsquigarrow B(n,p)$.

$p_{o_i} = P(X=i) = C_n^i \, p^i (1-p)^{n-i} \quad \forall i = 0,1,\dots n$

Il s'agit toujours de comparer une distribution observée à une distribution théorique, mais dans ce test, la variable d'intérêt X est de loi usuelle. Alors, on calculera $p_{o_i} = P(X=i)$ selon la loi théorique de la pop.

ex : (voir plus haut).

H_0 : La loi observée ajuste la loi théorique.

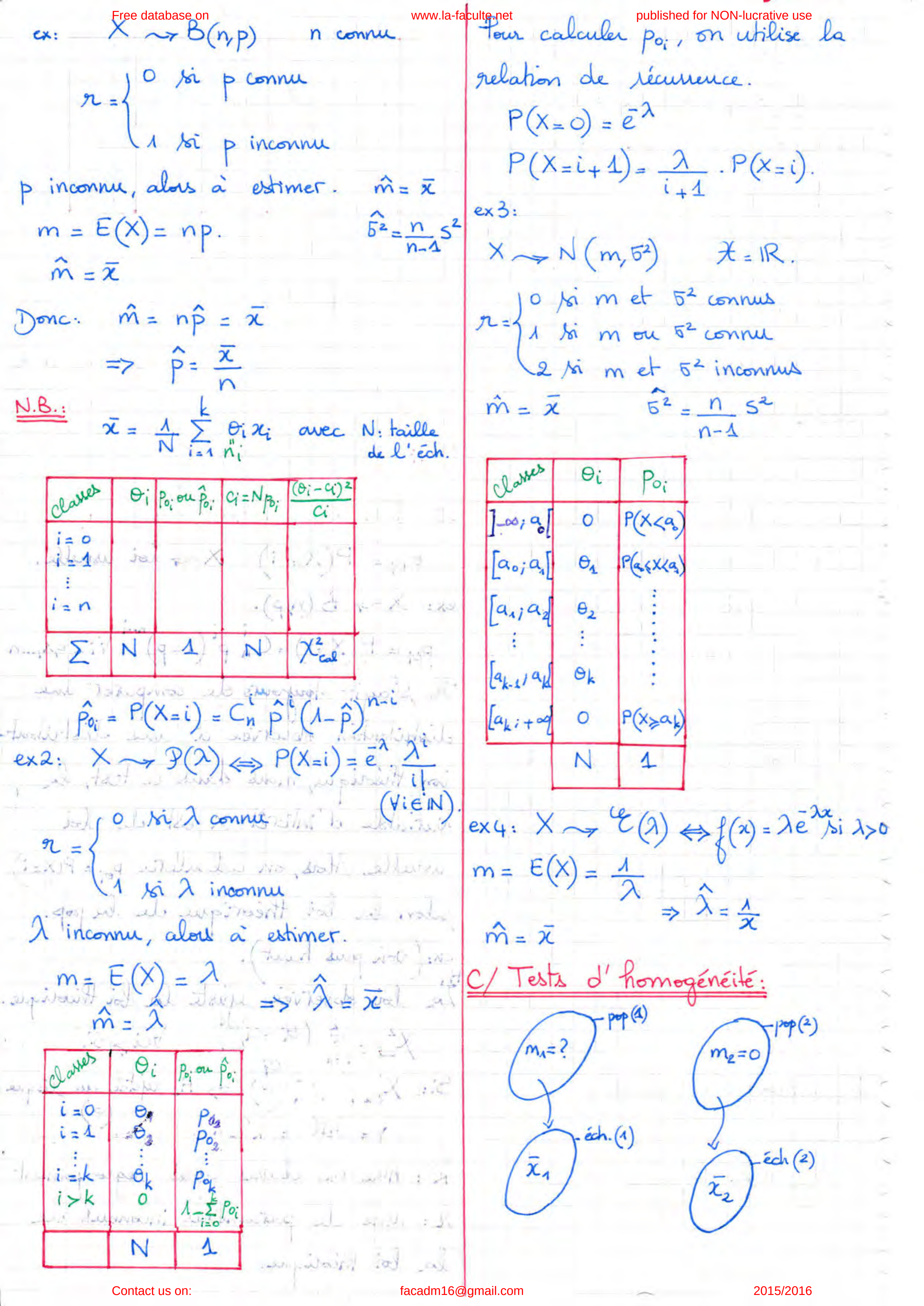
$$\chi^2_{cal} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i} \quad \forall c_i \geq 5.$$

Si : $\chi^2_{cal} > \chi^2_{\gamma}(\alpha) \Rightarrow H_0$ rejetée au risque (α)

$\gamma = ddl = k' - 1 - r$

k' : nbre de classes après regroupement

r : nbre de paramètres inconnus de la loi théorique.



ex: $X \rightsquigarrow B(n,p)$ n connu.

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ connu} \\ 1 & \text{si } p \text{ inconnu} \end{cases}$$

p inconnu, alors à estimer. $\hat{m} = \bar{x}$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2$

$m = E(X) = np.$

$\hat{m} = \bar{x}$

Donc: $\hat{m} = n\hat{p} = \bar{x}$

$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$

N.B.: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$ (θ_i : n_i) avec N: taille de l'éch.

Classes	θ_i	p_{0_i} ou $\hat{p}_{0_i}$	$c_i = N p_{0_i}$	$\frac{(\theta_i - c_i)^2}{c_i}$
$i = 0$ $i = 1$ $\vdots$ $i = n$				
Σ	N	1	N	χ^2_{cal}

$$\hat{p}_{0_i} = P(X=i) = C_n^i \, \hat{p}^i (1-\hat{p})^{n-i}$$

ex2: $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X=i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ $(\forall i \in \mathbb{N})$.

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ connu} \\ 1 & \text{si } \lambda \text{ inconnu} \end{cases}$$

λ inconnu, alors à estimer.

$m = E(X) = \lambda$ $\Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$

$\hat{m} = \hat{\lambda}$

Classes	θ_i	p_{0_i} ou $\hat{p}_{0_i}$
$i = 0$ $i = 1$ $\vdots$ $i = k$ $i > k$	θ_0 θ_1 $\vdots$ θ_k 0	p_{0_0} p_{0_1} $\vdots$ p_{0_k} $1 - \sum_{i=0}^{k} p_{0_i}$
	N	1

Pour calculer p_{0_i}, on utilise la relation de récurrence.

$P(X=0) = e^{-\lambda}$

$P(X=i+1) = \frac{\lambda}{i+1} \cdot P(X=i).$

ex3:

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ $\mathcal{X} = \mathbb{R}.$

$$r = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ et } \sigma^2 \text{ connus} \\ 1 & \text{si } m \text{ ou } \sigma^2 \text{ connu} \\ 2 & \text{si } m \text{ et } \sigma^2 \text{ inconnus} \end{cases}$$

$\hat{m} = \bar{x}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} s^2$

Classes	θ_i	p_{0_i}
$]-\infty; a_0[$	0	$P(X<a_0)$
$[a_0; a_1[$	θ_1	$P(a_0 \leq X < a_1)$
$[a_1; a_2[$	θ_2	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[a_{k-1}; a_k[$	θ_k	$\vdots$
$[a_k; +\infty[$	0	$P(X \geq a_k)$
	N	1

ex4: $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $\lambda > 0$

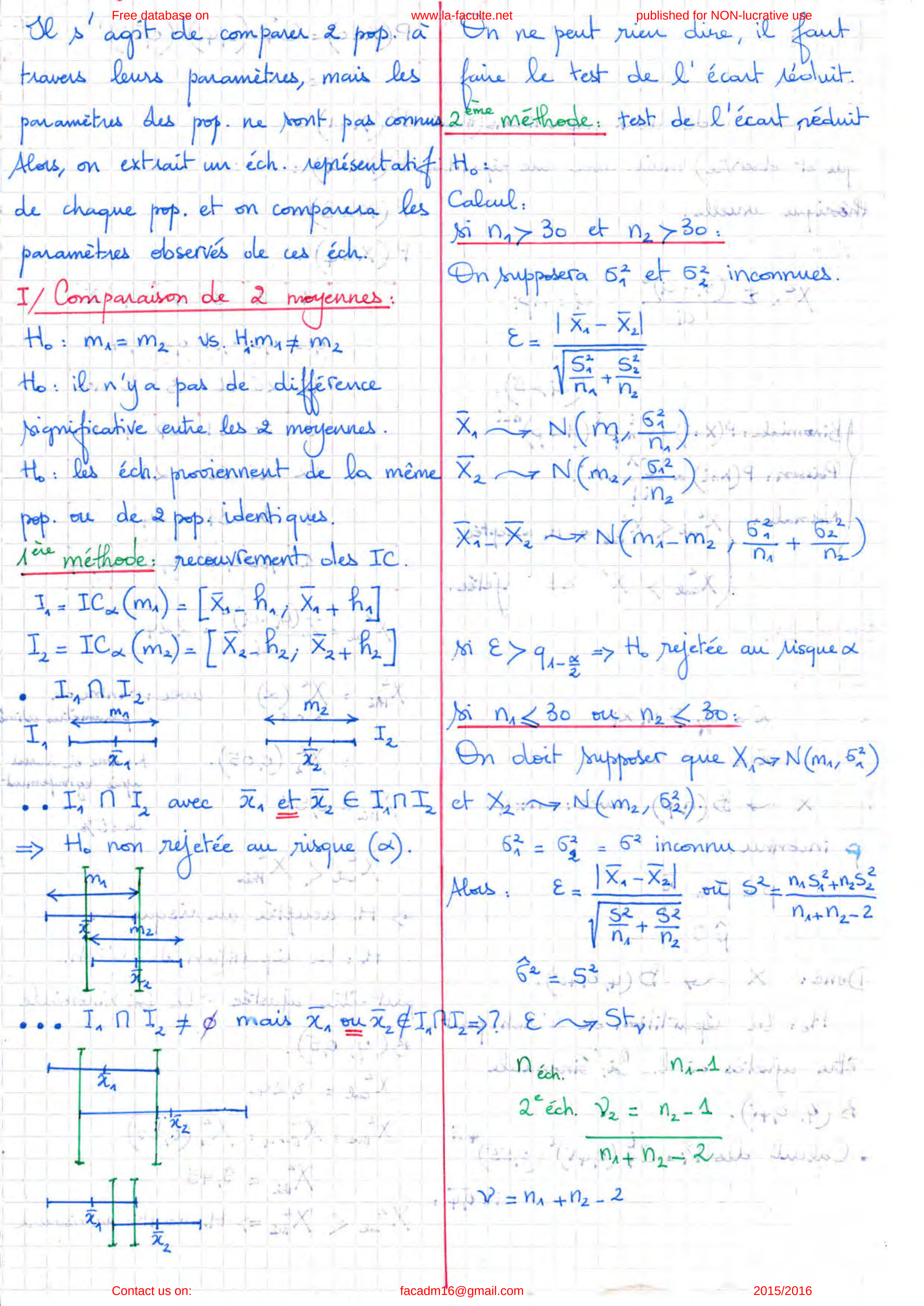
$m = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$

$\hat{m} = \bar{x}$

C/ Tests d'homogénéité:

- pop(1): $m_1 = ?$ → éch.(1): $\bar{x}_1$
- pop(2): $m_2 = 0$ → éch.(2): $\bar{x}_2$



Il s'agit de comparer 2 pop. à travers leurs paramètres, mais les paramètres des pop. ne sont pas connus. Alors, on extrait un éch. représentatif de chaque pop. et on comparera les paramètres observés de ces éch.

I/ Comparaison de 2 moyennes :

$H_0 : m_1 = m_2$ vs. $H_1 : m_1 \neq m_2$

H_0 : il n'y a pas de différence significative entre les 2 moyennes.

H_0 : les éch. proviennent de la même pop. ou de 2 pop. identiques.

1ère méthode : recouvrement des IC.

$I_1 = IC_\alpha(m_1) = [\bar{X}_1 - h_1 ; \bar{X}_1 + h_1]$

$I_2 = IC_\alpha(m_2) = [\bar{X}_2 - h_2 ; \bar{X}_2 + h_2]$

• $I_1 \cap I_2$

•• $I_1 \cap I_2$ avec $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2 \in I_1 \cap I_2$

$\Rightarrow H_0$ non rejetée au risque (α).

••• $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ mais $\bar{x}_1$ ou $\bar{x}_2 \notin I_1 \cap I_2 \Rightarrow ?$

On ne peut rien dire, il faut faire le test de l'écart réduit.

2ème méthode : test de l'écart réduit

H_0 :

Calcul :

Si $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$:

On supposera σ_1^2 et σ_2^2 inconnues.

$$\varepsilon = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$\bar{X}_1 \rightsquigarrow N(m_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$

$\bar{X}_2 \rightsquigarrow N(m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_2})$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightsquigarrow N(m_1 - m_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

Si $\varepsilon > q_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ rejetée au risque α

Si $n_1 \leq 30$ ou $n_2 \leq 30$:

On doit supposer que $X_1 \rightsquigarrow N(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \rightsquigarrow N(m_2, \sigma_2^2)$.

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ inconnu

Alors : $\varepsilon = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$ où $S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$\hat{\sigma}^2 = S^2$

$\varepsilon \rightsquigarrow St_\nu$

1er éch. $\nu_1 = n_1 - 1$

2e éch. $\nu_2 = n_2 - 1$

$n_1 + n_2 - 2$

$\nu = n_1 + n_2 - 2$